

11588

Bibl. Jag.

IV

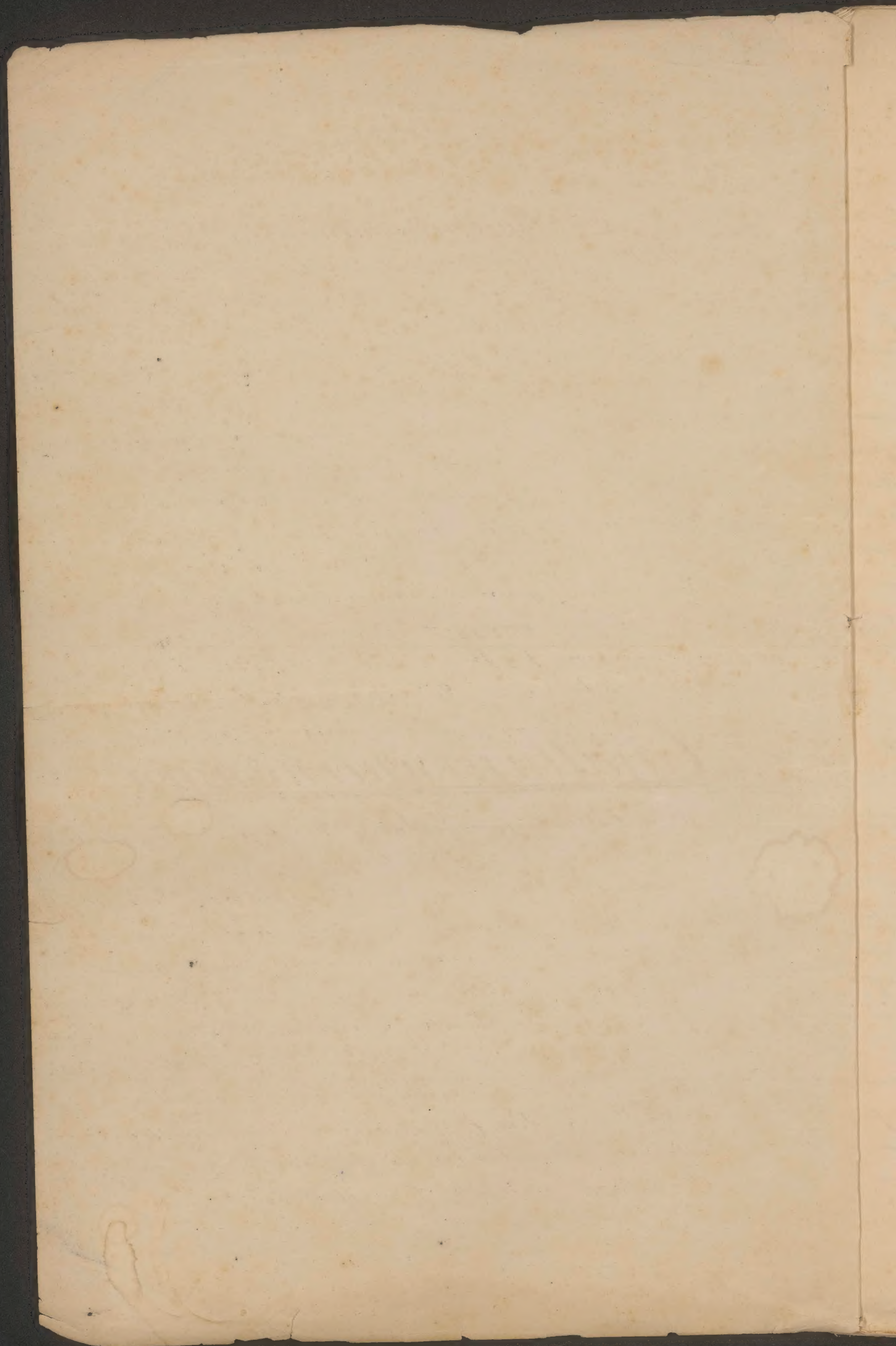
Zur Theorie

der

Capillarerscheinungen

H. Holski.

1886



Die Capillarererscheinungen sind von dem
Physiker frühzeitig bemerkt worden, ihre Gesetze
wurden studirt und ein Erklärungsgrund für
dieselben gesucht. Man überzeugte sich durch Ver-
suche, daß die Höhe, zu welcher eine Flüssigkeit
im Capillarrohren sich erhebt oder senkt, dem
Volumen der Flüssigkeit umgekehrt proportional ist,
die Erhebung zwischen zwei parallelen Platten
umgekehrt proportional ihrem Abstande, aber
nur sehr so groß, wie in einem kreisförmigen Roh-
ren, dessen Volumen gleich ist dem Abstände
der beiden Platten. Man bemerkte auch, daß
in einem conischen Rohren oder zwischen zwei
geneigten Platten eine Flüssigkeit steigt, wenn
er steht, gegen die andere Seite, wenn er
nicht steht, gegen die mittlere sich zu bewegen
strebt, etc. Diese und die anderen facts ge-
hörigen Erscheinungen erklärte man durch eine
unmittelbare Einwirkung der festen Röhre auf
die Flüssigkeit, eine Anziehung, welche insbe-
sondere wirken sollte, wie die Cohäsion der Massen.

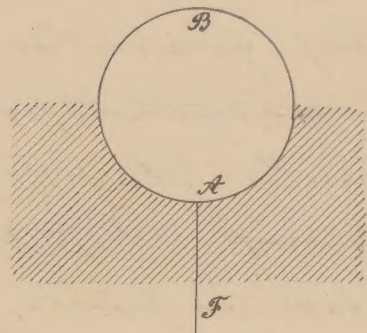
In diese mehr mannigfaltigen Vorstell-
ungen wurde erst zu Anfang dieses Jahrhunderts
die Luft gebracht, und zwar durch Laplace, wel-
cher in seiner Schrift „Théorie de l'action capillaire“
und in der ein Jahr darauf folgenden „Sup-
plément à la théorie de l'action capillaire“ be-
merkt, daß die Erscheinungen der Capillarität
allerdings in letzter Linie von der gegenwärtigen
Anziehung zwischen den Theilen der Flüssigkeit

Dörger und den Flüssigkeitstheorien voraussetzt, daß über diese Anziehung nicht, wie man angenommen hat, direct, unmittelbar die Lagillarsprossungen verursacht sind bestimmt. Vielmehr bedingt die Anziehung gewisse Flüssigkeit und Kosanmenen geneigt nur die Bildung einer concaven oder convexen Oberfläche und erst die Gestalt dieser ist für die Sprossungen. Der Lagillarsität qualitativ und quantitativ nachgebend. Laplace findet nämlich auf statistischem Wege, dass, wenn die Flüssigkeit in eine Kugelfläche endet, die Kraft, welche durch die Krümmung hervorgerufen wird, dem Kugelradius umgekehrt proportional ist; dass ferner, wenn die Oberfläche anders gestaltet ist, die oben erwähnte Kraft proportional ist dem arithmetischen Mittel aus der größten und der kleinsten Krümmung in dem betreffenden Punkte. Auf Grund dieses Resultats stellt Laplace für alle freien Oberflächen eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung auf, durch deren Integration man über die Gestalt der Flüssigkeit in besonderen Fällen Ausfluss erhält. Die Resultate dieser Untersuchungen sind durch viele andere Versuche bestätigt worden und die Übereinstimmung der Resultate mit den Experimenten bestätigt die Richtigkeit des Laplace'schen Grundgesetzes.

Was nun die Ableitung derselben anbetrifft, so gründet sich diese auf geometrische Betrachtungen und wird über die Natur der gewissen den Flüssigkeitstheorien vor-

kunden dürfte die einzige Annahme gemacht, daß sie nur auf äußerst kleine Entfernungen betreffen und in marklosen Pflanzen wirksam sind. Unter dieser Voraussetzung unter-
sucht Laplace die Wirkung einer Kugel AB

Fig. 1.



von Flüssigkeit auf einen geraden Linie und radial von A ins Unendliche verlaufenden Faden F von derselben Flüssigkeit und findet diese Wirkung $= H - \frac{H}{r}$, wobei H und H bestimmte Integrationsdrücke und r den Radius der Kugel bedeutet. Dabei deutet die Rechnung darauf hin, daß H bedeutend größer ist, als H, indem das Differential des letzteren Stützdrucks gleich ist ~~mit~~ dem Differential des ersten multipliziert mit einem factor, der für die ganze Ausdehnung des Integrals äußerst klein bleibt. Da man sich nun von der Flüssigkeit allseitig umgebenen Flüssigkeitstheilen sich im Gleichgewicht befindet, so, pflicht Laplace, muß, wenn der Faden bis an die Oberfläche reicht, also die Kugel AB aufsteht, der Faden mit einer Druck $H - \frac{H}{r}$ in die Flüssigkeit hineingezogen werden. Daraus folgert Laplace einen Druck $= H - \frac{H}{r}$, der von jeder Flüssigkeitsoberfläche in das Innere derselben sich fortsetzt, die Lössen bewirkt und die Flüssigkeit in Lössen versetzen bewirkt, weil in denselben das r, also auch $H - \frac{H}{r}$ kleiner ist, als außerhalb derselben.

Gegen die Laplace'sche Ableitung wies

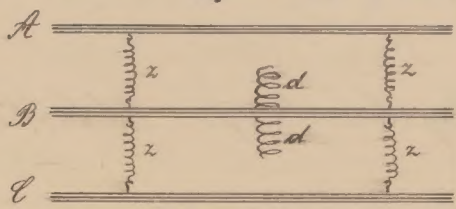
Poisson in seinem im Jahr 1831 erschienenen Werke: „Nouvelle théorie de l'action capillaire“ Gedanken sehr mathematischer Natur betreffend die Erklärung der Kleinheit gewisser Größen, hauptsächlich aber darauf gegründet, daß Laplace die Kräfte der Flüssigkeit als überall constant annimmt, während sie doch gerade an der Oberfläche, daran Messungen doch maßgebend sind, rapid abnehmen, unmittelbar an der Mündung dagegen ebenso rapid zunehmen muß. Diese Änderungen der Kräfte beachtet Poisson in seiner Theorie, nimmt eine andere Einteilung der Flüssigkeit vor und gelangt zu einem Resultate, das sich von dem Laplace'schen nur durch die Form der bestimmten Integrale unterscheidet. Das Experiment kann sich weder für die eine noch für die andere Form entscheiden, da das Gesetz der molekularen Wechselwirkung unbekannt ist.

Aber noch von einem anderen Gesichtspunkte lassen sich, wie mir scheint, gegen die Laplace'sche Reduktion der von Lagrange'schen Formeln zu Grunde liegenden Theorie Gedanken fassen, und zwar vom Standpunkte der Mechanik.

Um verständlicher zu werden, will ich als Einleitung einen analogen aber mehr konkreten und evidenten Fall voranschicken.

Wir denken uns drei parallele Platten, A, B, C, parallel an einander gestellt sind die beiden äußeren mit der inneren durch Zug-

Fig 2.



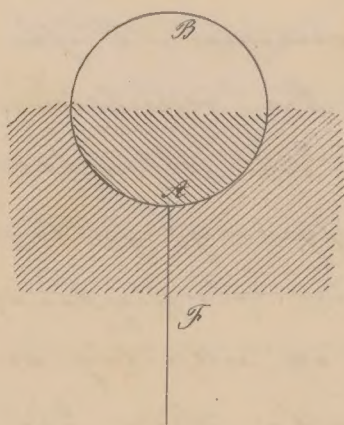
fäden z verbunden. Gleichzeitig sind zu beiden Seiten der Platte B zwei andere Fäden d angebracht. Wenn man A und C

durch äussere Kräfte festgehalten werden, so nimmt B eine Lage ein, in welcher die von den Zügen α rückwärts und von den feststehenden Platten A und C auf gleichsam unfehlenden Drüsten einander das Gleichgewicht halten. Erst wenn man nur die Platte A und mithin nur die auf oben wirkenden Züge, so wird das Gleichgewicht gestört und B hinuntergezogen.

Wenn aber A ursprünglich nicht festgehalten wurde, so nähern sich die Platten aneinander, A an B und B an C und drücken die Federn d so weit zusammen, daß die Reaction dieser den Zügen α der Federn α gleichkommt. Wenn man jetzt die Platte A und mithin nur die Federn zwischen A und B aufhebt, so hat die auf die Platten B und C und ihre Masselmixtur gar keinen Einfluss.

Wenn im Grunde ganz analoges gilt bei der Bewegung der von Laplace betrachteten Kugel und die ungleiche Bewegung des Gleichgewichtes beim zusammen Drücken. Die Kugel AB ist analog der Platte A, der Flüssigkeitssphäre F entspricht die Platte B und die von der Sphäre F umgebende Flüssigkeit die unterste Platte C. Im Innern der Flüssigkeit, bezieht Laplace, befindet sich eine Flüssigkeitssphäre im Gleichgewicht, weil er von AB gleich stark rückwärts, wie von der übrigen Flüssigkeit abwärts gezogen wird. Aber die Kugel AB hat keine fixe Lage, wird durch keine äussere Kraft festgehalten; sie bewegt sich (analog der Platte A) nur der übrigen

Fig 3.

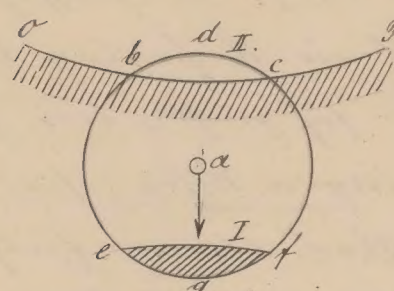


Flüssigkeit (analog der Platte A) nur der übrigen

6.
Flüssigkeit, ihre Lage ist eine function der
Lage aller Theile $\&$. die Anziehung der Kü-
gel auf die Theile beruht also nur auf der Nä-
herung der Theile, die so weit fortgesetzt,
daß die anziehenden repulsiven Kräfte den at-
tractiven gleich werden, d. h. die Flüssigkeit die
ihre eigentümliche Kräfte annimmt. Kinetik
kann über die Mischwirkung zwischen der
Kugel und den Flüssigkeitstheilen, auf welche
sie pfeilt, den Einflüssen der tiefen Theile
des Gleichgewichts folgen, nach der Entfernung der
Kugel eine Bewegung des Gleichgewichts, einen
nach einwärts gerichteten Druck $K - \frac{H}{r}$ zur
Folge haben. - Der Flüssigkeitstheil im Innern
der Flüssigkeit befindet sich im Gleichgewicht,
weil sein Gewicht dem Auftrieb gleich ist, nicht
weil die von allen Seiten wirkenden molec.
ularen Anziehungen einander des Gleichg.
wichts folgen. Die anziehenden Molecularkräfte
wirken auf die in ihrer Wirkung Versetzung nicht;
die Molecula werden auf unter ihrem Einflusse
einander fortwährend wirksam, die Flüssigkeit
wird zusammengepresst, wenn nicht die
mit der Theile zusammenwirkenden repulsiven Kräfte
den attractiven entgegenwirken und dieselben
aufheben, sobald die normale Theile auf ein-
gestellt sind. Es sind also die repulsiven und attrac-
tiven Kräfte und nicht die attractiven unter
einander, die auf des Gleichgewichts folgen; für die
Kügel oder Bewegung eines Flüssigkeitstheils
ist es ganz gleichgültig, ob es selbst von Flüssig-
keit umgeben ist, oder nicht. Für die Dichte ist
dies allerdings nicht gleichgültig; doch auf diese
Betrachtungen werden wir erst später zurückkom-
men.

Am Querschnitt will ich nur betonen, dass ein von der obersten Spitze herabhängender Brück im Sinne der Laplace'schen Theorie mit im unlöslichen Widerstand zu stehen scheint mit dem Principe der Erhaltung des Schwerpunktes bei der Einwirkung bloss innerer Kräfte.

Möge a nun in der Mitte der Oberfläche OF befindliches Theilchen vorstellen, das um a gezogen Fig. 4.



Dies ist seine Wirkungsfläche, davon oberer Theil bcd über OF hervorragt. Da nun die Wirkungen aller in bcd enthaltenen um a symmetrisch ungleichmäßig Theilchen sich gegenseitig aufheben, so bleibt nur die von I ausgehende Wirkung und ^{was ist} der daraus resultierende aufwärts gerichtete Druck aller in der Mitte der Oberfläche enthaltenen Theilchen ~~ist~~ offenbar identisch mit dem von Laplace abgeleiteten Brücke $H = \frac{2\sigma}{r}$.

Vorausgesetzt nun, die Zusammenziehung der Flüssigkeit um den Abschnitt II wirkt mittelst einer a nach abwärts gerichteten Kraft p (was bereits oben betrachtet wurde) so ist doch die Anziehung zwischen a und I für das ganze System (a und I zusammen) als innere Kraft im vollen Sinne des Wortes zu betrachten. Mit diesem Druck, welcher a nach abwärts zieht, wird I von a nachwärts gezogen, die Wirkung durch die Gegenwirkung aufgehoben. So resultiert in der Mitte der Oberfläche eine Flüssigkeitsschicht von der Seite der Flüssigkeitsmasse, innerhalb welcher alle Molekülkräfte sich unter einander aufheben. Diese Schicht kann also mit der übrigen Flüssigkeit unmöglich einen molekularen "Brück" eingeben, der die Längsarrangierungen hervorruft, Längsarrangierungen, bei denen

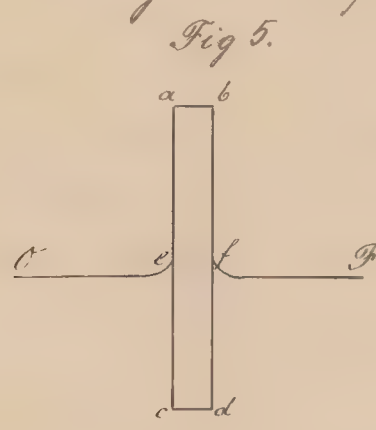
weist nur der Versuch aus, dass die besagten Flüssigkeiten
sondern meistens auf der Versuchung der ganzen
Flüssigkeitsmasse sich verhält.

Dieser Punkt wird auf Grund nicht be-
kannt, dass Laplace in seinem zweiten Werke:
„Supplément à la théorie de l'action capillaire“ die
Lugillussprossungen „von einem neuen Gesichts-
punkte“ betrachtet, indem er die unmittelbare
Anziehung der Röhren auf die Flüssigkeit als für
überwiegende äußere Kraft in Rechnung bringt. Aber
diese Anziehung verhält sich nicht, wie man annehmen
kann, in der Mitte der engen Röhre; sie wirkt näm-
lich nur auf unmittelbare kleine Entfernungen
und könnte nur eine äußerste dünne Flüssig-
keitspfiste in der unmittelbaren Nähe der Röh-
renwand verursachen. Damit man die ganze Flüssig-
keit ansetzen kann, bedarf es der Vermittelung
eines von der freien Oberfläche herkommenden Drucks
 $H - \frac{1}{2}$ und für collidirt man mit dem Principe
der Erhaltung des Schwerpunkts. - Die flüssige Masse,
wie man sie auf der planetarischen Formate, könnte
vielleicht durch die gegenseitige Anziehung der Theil-
chen auf der Form einer Kugel geben; dann für
verbreiten sich die Querschnitte auf alle Entfernungen,
je der Theile wirkt auf alle anderen und um-
gekehrt. Bei den Lugillussprossungen aber setzen
wir voraus - und diese Voraussetzung liegt Laplace
seiner Rechnung zu Grunde -, daß die Massenwir-
kung nur zwischen äußerster nahe an einander
gelegenen Theilen besteht; und, weil es aber
eine Massenwirkung ist, wird sie auf den mittleren
Theilen gar nicht mit.

Nach einer kurzen Drängung sich für nicht: Wenn

im Innern einer Flüssigkeit wirkt auf sie von der freien Oberfläche her ein Druck H von ganz bedeutender Größe. Hätte man nicht in manchen Fällen diesen Druck direct messen können?

Mit Danken üng einen geismutigen Rögar $abcd$ zum Ende in einer Flüssigkeit eingetaucht. Die hier vorkommenden Druckverhältnisse werden



von der Laplace'schen Theorie in folgender Weise betrachtet:

Von der freien Oberfläche OF geht eine Flüssigkeit auf einen Druck H in. Das Innere der Flüssigkeit fort bis auf die Trennungsoberfläche cd . Diese ist, da sie nicht eben ist, einem ebenso großen Druck H nach oben und die beiden Drücke haben einander auf. Da nun die Trennungsoberfläche cd auf wirkenden Masseneinwirkung zwischen den Enden des festen Rögar und der Flüssigkeitseileisen gibt sich als Masseneinwirkung auf müssen gar nicht eintreten und kommt nicht in Betracht. So bleibt dann als die einzige auf cd wirkende Kraft der Auftrieb übrig und nur dieser läßt sich direct messen.

Aber diese Erklärung scheint mir nicht ganz einmündig zu sein.

Man denke sich, der Rögar $abcd$ bestände aus einer Materie, deren Enden auf die Flüssigkeitseileisen gerade so wirken, wie die Flüssigkeitseileisen auf einander. Ob es einen solchen Rögar gibt, ist ganz gleichgültig. Jedemfalls kann man diesen Fall sehr angenähert vorstellen, indem man das Prismen üng derselben

Flüssigkeit in erstarrtem Zustand festhält. Setzt man die Flüssigkeit cd keinen Druck nach abwärts über, so für die in der Röhre von cd befindlichen Flüssigkeitsmoleküle die Wertschritte genau dieselben sind, als wäre von beiden Seiten der Grenzfläche Flüssigkeit vorhanden. Dann wird der von OE vorhandene Druck H durch keinen Gegendruck aufgehoben, man müßte dann die ganz gewöhnliche Annahme thun, daß auf der Grenzfläche der feste Körper ab einen nach abwärts gerichteten Druck übt. Auf diese Weise gelangt außer dem Auftriebe noch der Druck H auf cd zur Wirkung und das eingetauchte Prisma müßte mit großer Gewalt (Laplace schätzte H auf 2-3 Atm.) aus der Flüssigkeit herausgedrückt werden, was aber nicht einmahl angemerkt geschieht. Die eingetauchten Körper befolgen alle das verfinsterte Prinzip bis auf ganz kleine Abweichungen, welche von der unvollkommenen Flüssigkeit herrühren.

Möchte man dagegen einwenden, daß die Theile eines festen Körpers wirklich ganz anders auf die Flüssigkeitstheile wirken können, wie diese aufeinander, so läßt sich dies auf der folgenden Einwand zeigen:

Fig. 6. Die Körper befolgen das verfinsterte Prinzip ganz unabhängig von der Gestalt ihrer unteren Grenzfläche. Druckt man auf die Flüssigkeit cd einmahl concav, dann wieder convex abgedrückt, so müßte der von der Trennungsfläche cd auf nach abwärts fortfließende Druck



einmal größer, das andere Mal kleiner sein,
als der von OF hervorgehende, so daß das ring-
förmige Röhren bald einen größeren bald einen
kleineren Austrieb aufnehmen müßte, als es auf
dem verjüngten Röhren aufnehmen sollte.

*

*

*

Für von diesen Widerständen und Spannungen
bedenkten scheint mir eine ganz andere Erklärung
für die Capillarspinnungen, welche zu Anfang
dieses Jahrhunderts von Thomas Young gegeben wurde.
Ich fand bei Laplace und Poisson einige Andeutun-
gen darüber vor, denen ich entnehmen, daß Young
die freie Flüssigkeitsoberfläche „mit einer gespann-
ten Membran vergleicht“ ohne jedoch für die Er-
klärung einen Grund anzugeben. Da ich aber die
Schriften Young's nicht in die Hand bekommen
konnte, so bin ich nicht im Stande zu sagen, in-
wiefern meine Ansichten auf denen Young's un-
terschieden. Ich will versuchen, sie in möglichst kür-
ze und deutliche Worte zu fassen:

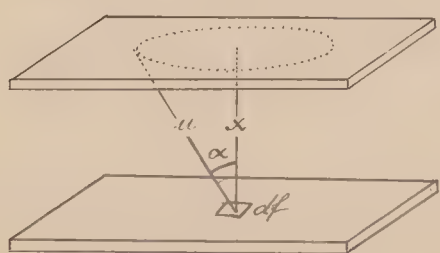
Jede freie Flüssigkeitsoberfläche bildet ein ge-
spanntes Häutchen, dessen Spannung S von der
Natur der Flüssigkeit abhängt. Wenn die Ober-
fläche irgend wie gekrümmt ist, so übt sie in
jedem Punkte in der Richtung der Normale einen
gegen die concave Seite gerichteten Druck P , dessen
Größe ist:

$$P = S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

wobei R_1 und R_2 die beiden Hauptkrümmungs-
radien der Fläche in dem betreffenden Punkte be-
deuten. Auf diese Weise ist die freie Oberfläche

Daselbst im Räume, mag die Äthulinien
in der Ebene, nämlich ein Ort gewissen
Rückgang (wie der Lufteboden eines Gefäßbarome-
ters), dessen Ränder an der Wand förmlich be-
festigt sind, und dessen von der Krümmung her-
rührende Hub- resp. Druckkraft P in jedem Punkte
dem hydrostatischen Drucke das Gleichgewicht
hält.

Das elastische Vorwärtsspringen einer Ober-
flächenspannung scheint mir eine notwendige
Folge der molekularen Anziehung zu sein.
Fig 7.



Vorher mir noch zwei zuvolla.
In beiden Platten der Flüssigkeit von
der Dicke dx und dy in einer
Entfernung x von einander.
Die Druck, mit welcher die
beiden Platten einander anziehen, läßt sich
leicht ableiten aus der Druck, mit welcher die
einzelnen Theile auf einander wirken. Wir
nennen die Anziehung zweier Volumeneinheiten
in der Entfernung u

$$p = g(u),$$

wobei mir über die Natur von g nichts weiter
wissen, als daß $g(u)$ für jeden möglichen Wert
von u bestimmt ist. Aus diesem Gesetze be-
rechnet man leicht die Anziehung α der bei-
den Platten auf einander für jedes Quadrat-
zoll

$$\alpha = dx \cdot dy \cdot 2\pi x^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} g\left(\frac{x}{\cos \alpha}\right) \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$


oder der Kürze halber

$$\alpha = dx \cdot dy \cdot f(x)$$

Barung löst sich von Mische der Lösungsdruck
in Innern der Flüssigkeit heraus, d. h. der
druck, welcher eine Ebene im Innern des
Flüssigkeitsschichtes in Folge der Anziehung aller
zu beiden Seiten liegenden Theile.

Fig 8.

AB möge ihm Gutes in

dy 

Löffelringstück, malieren AB

$dx^y =$ \mathcal{D} avlaigat, xoyibx fuq ulq \mathcal{D} i mma

Der Anzählungen aller Pfeifen auf der ersten
Seite I, II, III, etc. auf alle Pfeifen auf der unter-
sten Seite 1, 2, 3... etc.

Die Anzeigung von C auf der hinter. A B ge-
legenen Pflisten ist

$$b = dy \int_y^{\infty} f(x) dx$$

Da nun jede über AB gelegene Piste die
junge unter AB befindliche Flüssigkeit durch-
dringt, so wird die Wirkung der jungen Disso-
lution auf die junge jenseitige Masse durch das
Integral ausgedrückt

$$C = \int_0^{\infty} dy \int_y^{\infty} f(x) dx \quad \dots \quad (1).$$

Keine Anziehung kann über bayreuthisches Maass hinaus Kühlung der Erbsen zur Folge haben. In der AB mit zunehmender Kiste vergrößern Dosisen vorwärts, welche den Anziehungen gleich werden, sobald die normale Kiste sich eingestellt hat. Der Ringdruck c vergrößert sich also die Größe der Losion, die nicht von der Oberfläch-

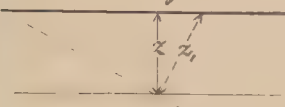
fortsetzt, sondern an jeder Stelle durch die moleculare Anziehung direct gezogen wird. Es ist uns klar, daß ungeachtet der ruffen Abnahme der Anziehung mit zunehmender Entfernung die Flüssigkeit sich nicht merklich ins Unendliche zu erstrecken braucht; die unterste Piste AB muß nur in einem merklichen Abstande von der Oberflache sich befinden.

So lange es sich um den Lössion, Druck tief in Inneren einer Flüssigkeit handelt, ist es gleichgültig, in welcher Lage man die Pisten annimmt; da wir uns die Flüssigkeit nach allen Richtungen unendlich weitgedehnt denken, so muß die Rechnung für eine horizontale, vertikale oder schräge Pistenlage immer denselben Druck $c = \int_0^z dy \int_0^y f(x) dx$ resultiren. Dies ist uns für das Gleichgewicht in einer Flüssigkeit unumgänglich notwendig.

Anderg gestalten sich die Profile in einem Punkte, der von der Oberflache um weniger als den halben Durchmesser der Wirkungssphäre absteht, so, daß bereits ein Theil der wirkenden oberen Pisten faßt. Nennen wir die Entfernung des untersten Punktes von der Oberflache z , so ist bei horizontaler Pistenlage das Integral nicht zwischen 0 und ∞ sondern nur zwischen den Grenzen 0 und z zu nehmen

$$c' = \int_0^z dy \int_0^y f(x) dx$$

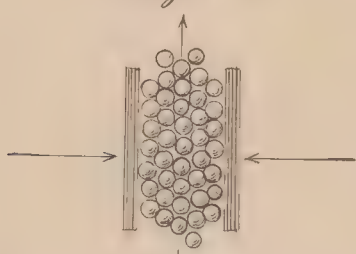
Fig. 9.



Wenn wir jetzt die Pistenlage ändern, so bleibt der Ausdruck c' nicht constant, indem bei einer Verschiebung der Pistenrichtung die obere Grenze des Integrals nicht ($= z$, wird) und unendlich,

sobald die Dichtungsveränderung unendlich geworden ist, der Druck $= \infty$ annimmt. Der Druck in der Röhre der Oberflüche ist also nicht nur allen Richtungen derselbe; in der zur Oberflüche senkrechten Richtung werden die Theilchen mit dem vollen Druck $c = \int dy \int f(x) dx$ an einander gedrückt, während der Druck in der auf der Oberflüche parallelen Richtung nur der Größe $c' = \int dy \int f(x) dx$ beträgt. Daß in einer Flüssigkeit, also in einem Körper, dessen Theilchen absolut unspürbar sind und in dem der Druck auf allen Richtungen sich gleichmäßig fortsetzt, ein derartiger Zustand unmöglich ein Gleichgewichtszustand sein kann, ist leicht einzusehen. Wenn gerade so, wie Kugeln zwischen zwei Platten gedrückt, nach

Fig. 10.



den beiden nicht gedrückten Seiten auszuweichen, so werden auf die Länge der Oberflüchthärten gedrückten Moleküle nach der Seite des spürbaren Drucks (d. h. in der Richtung der Flüssigkeit) hin gedrückt, während die drückenden Moleküle sich einander nähern. Auf diese Weise drückt sich nach der Oberflüche hin und zu derselben senkrechten Flüssigkeitspfeile von der Seite da in tangentialer Richtung sich zusammenziehen, glücken zusammenzuschieben und ganz mit einem Druck.

$$dL = dz(c - c') = dz \int_2 dy \int_4 f(x) dx$$

Diese Tendenz werden alle Körper zeigen bis zu einer Tiefe, in der man ohne Gefahr die Flüssigkeit auf allen Richtungen für unendlich un-

geschafte unpaar kann. Alle in der Höhe der Oberflüche befindlichen Pisten zusammen werden durch ihre Verbindung, sich zusammenziehen, eine Spannung ausüben, deren Größe ist.

$$I = \int_0^x dx \int_0^y dy \int_0^z f(x) dx \dots\dots 2.)$$

Diese Spannung ist so, welche nach meiner Ansicht den Längenspannungen zu Grunde liegt.

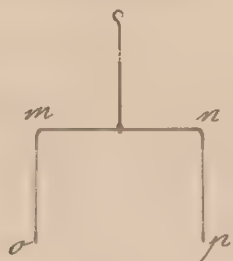
Die erste Frage, die sich hier aufdrängt, ist die, ob sich denn eine derartige Oberflüchenspannung feststellen lässt; und diese Frage muss bejahend beantwortet werden.

Man kann die Spannung der Oberflüche nicht messen, sondern nur mit einem gewissen Grade von Genauigkeit messen. Das Mittel dazu bieten uns die feinen Flüssigkeiten, welche die Flüssigkeiten bilden.

Wenn man eine Flüssigkeit stark spirituell oder durch eine Röhre in dieselbe einbläst, zeigen sich auf der Oberflüche Luftblasen, welche von einer dünnen Flüssigkeitsmembran umhüllt sind. Bei sehr beweglichen Flüssigkeiten, Alkohol, Aether etc. verschwinden die Blasen schon nach kurzer Zeit, während bei anderen die Erscheinung sehr lange andauert. Ein geringer Wassergehalt in Wasser gestattet uns die Lösung einer Blase von beträchtlichen Dimensionen auszubilden, welche einige Minuten andauert. Man bemerkt auch, dass die Luft in einer solchen Blase ein wenig comprimirt ist; denn sobald man die eingeschlossene Luft mit der umgebenden durch eine Röhre, so erfolgt ein bald

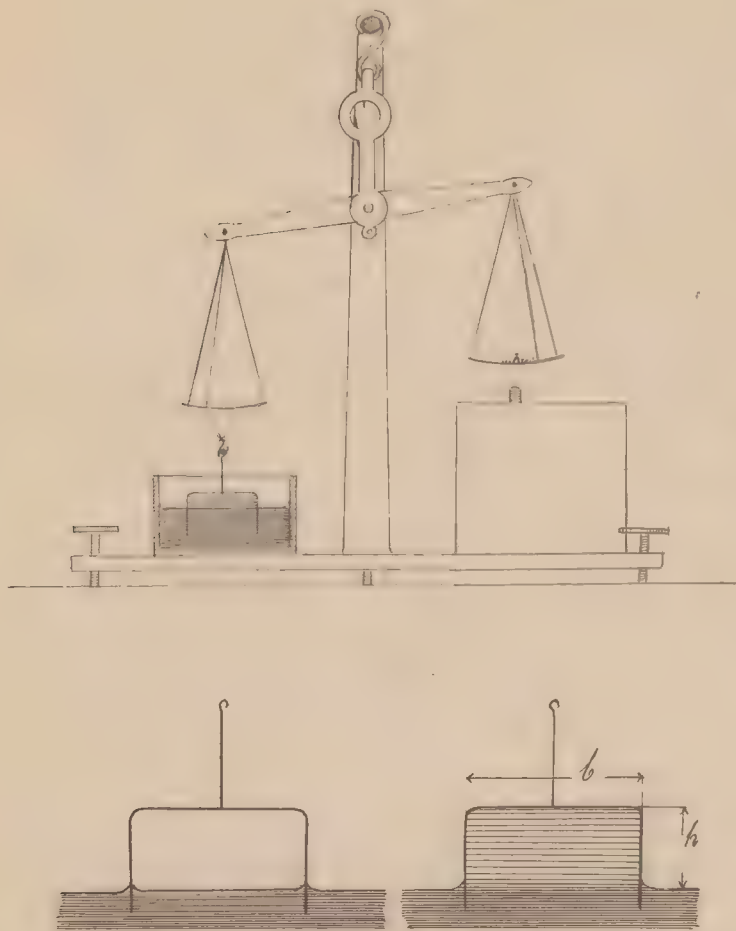
eine Construction der Lufte. Wenn dieser Um-
stand nicht darauf hin, daß das Innere flüssig
kritischflüssig gespannt ist und Luft seine Quan-
tität die Luft in der Lufte comprimiert. Man
könnte aber meinen, die Longrassion sei
lediglich eine Folge der Krümmung der Lufte,
indem die äußere concave Oberfläche einen
Druck $H + \frac{H}{r}$ gegen das Innere der Lufte, die
innere concave Fläche einen Druck $H - \frac{H}{r}$ in
entgegengesetzter Richtung ausübt, so daß ein
resultierender Druck $2\frac{H}{r}$ die Longrassion
der Luft bewirkt. Gegen diese Annahme spricht
aber der Umstand, daß die Blasenhülle, auch
wenn sie nicht gekrümmt ist, sich zusammen-
ziehen strebt.

Fig. 11.



Wir nehmen eine ungelenke
stumpfe festschalte Gabel von
der in der Figur abgebildeten
Gestalt. Die beiden Gabeläste
sind zu einander parallel und
ihr Abstand ist b , eine bekannte
Dimension. Wir tauchen die Gabel in verti-
caler Stellung so tief in eine Flüssigkeit ein,
daß der Querschnitt mn gerade untersteht.
Dann ziehen wir die Gabel heraus, aber nur
so weit, daß die Gabelspitzen o und p noch ein-
getaucht bleiben. Der Raum zwischen dem
Querschnitt, der Flüssigkeitsoberfläche und den
Gabelästen erfüllt mit einem dünnen
Schichten überflutet, einem Schichten von
derselben Art, wie die oben erwähnten Lu-
tefüllung. Gleichzeitig wird die Gabel in die
Flüssigkeit hineingezogen. Die Größe des Zuges

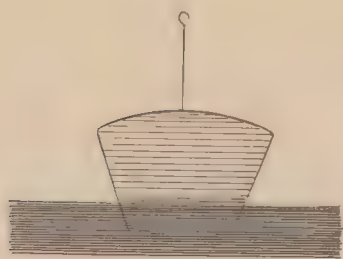
Luft auf Luft massen, wenn man die Ge-
bel in ein Guckfen
Fig. 12.



bal in ein Guckfen
einfängt, welche an
drei Löcherlöcher unter
der Pfule immer anstehen.
Diese Mauer befestigt
ist. Unter derselben
Pfule ist ein kleines
Gefäß aufgestellt, das
mit der zu unter-
suchenden Flüssigkeit
so weit gefüllt ist,
daß bei einwirkender
Mauer die Spitzen
der Gubeläste ein-
gewandt sind. Hier-
auf wird die Mauer
in Gleichgewicht, das Ge-
fäß so weit gefüllt, daß der Gubelast ein-
gewandt und dann wieder niedergestellt. Es
zeigt sich zwischen den Gubelästen ein Guckfen
und gleichzeitig zeigt sich der Mauerbalken stark
nach der Seite der Gubel. Um wieder Gleich-
gewicht herbeizuführen, muß man auf der
entgegengesetzten Seite Gewicht Q auflegen,
welche nun von dem Guckfen eingewandt zu
vergrößerung. Da nun alle Messungen darin
übereinstimmen, daß die Stärke des Zuges pro-
portional ist der Breite b der Gubel, so stellt
sich der Zug immer dem breiten Breitenverhältnis von
dem betrachteten Flüssigkeitsspiegel, also die
specifische Spannung Σ darstellbar.

$$\Sigma = \frac{Q}{b}$$

Die Spannung wirkt Dämpfung nicht ein-
seitig in articular Richtung,
Fig. 13.

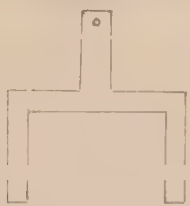


nicht nur auf das Gelenk
gleichseitig in allen Richtungen
zu contrahieren, man muss
auf diese ein einzelnes zu
seinem Punkte festgehalten

Gabel überzogen, deren Äste durch die seitliche
Spannung des Gelenks zusammengezogen und
verbunden werden.

Serner zeigen die Messungen, dass die spe-
cifische Spannung Σ des Gelenks einzig und allein
von der Natur der Flüssigkeit und deren Tempe-
ratur abhängt, dagegen unabhängig ist von der
Größe h , bis zu welcher das Gelenk über die
Oberfläche gezogen wurde und unabhängig von
dem Material der Gabel. Ich erwähnte oben Ge-
bälte wie Eisen u. Kupferdrath auf Gelenken, die
mit dünnen Glimmerblättern beschichtet

Fig. 14.



waren, die auf nur den Druck
gelenken den Kopfteil haben; dass sie
von anderen Flüssigkeiten nicht
angegriffen werden und eine große
zu Genauigkeit gestatten. Aber alle Arten von
Gelenken haben dieselben Resultate.

So fand ich als Mittelwerte von drei bis vier
sehr nahe übereinstimmender Messungen für die
spezifischen Spannungen der Gelenke nachfolgender
Flüssigkeiten die Werte:

Temp.	Flüssigkeit	Σ in Gramm pro 1 cm^2
15°C	Abs. Alkohol	0.0480
"	Aceton	0.0510
"	Conc. Schwefelsäure	0.1125

Temp.	Flüssigkeit	Σ in Gramm pro 1 cm
15°C	Schwefeläther	0.0382
"	Schwefelkohlenstoff	0.0680
"	Wasser	0.1485
"	Benzin	0.0460
"	Petroleum	0.0544
"	Terpentinöl	0.0590

Nun ist es einleuchtend, daß die flüssigkeit.
membran als Hülle einer Lufte vermöge ihrer
Spannung die eingepflossene Luft comprimiren
und ihr diejenige Gestalt geben muß, welche
ein bestimmtes Volumen in der kleinsten Ober-
fläche einfließt (nämlich die Kugelform). Die
Größe der Longression P läßt sich leicht berechnen
aus dem Principe der wirklichen Arbeitsab-
gabe. Nennen wir den Radius der Lufte r und

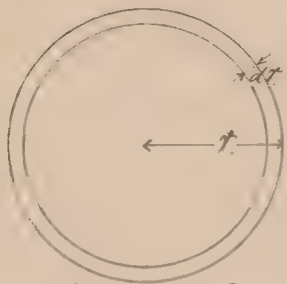


Fig 15.

lassen ihn nun dr abnehmen, so
ändert sich die Oberfläche um $8\pi r dr$,
das Volumen um $4\pi r^2 dr$. Die von
der Lufte geleistete Arbeit

$$= \Sigma. 8\pi r dr$$

die bei der Verminde rung des Luftvolumens ver-
brauchte Arbeit

$$= P. 4\pi r^2 dr$$

Durch Gleichsetzung resultirt mir:

$$P = \frac{2\Sigma}{r} \dots\dots 3.)$$

Nun muß zu überzeu gen, ob diese Lage fang
wirklich stattfindet, gebe ich den Druck in diesen
blauen Druck gemessen. Ich beziehe mich zu die-
sem Punkte der in der Figur abgebildeten Vor-
richtung, deren Maßen darin besteht, daß die Long-

gepumpt in der Lupe gemessen wird durch den
 Aufstieg einer leicht beweglichen Flüssigkeit (z.B. Wasser
 oder Glycerin) in einer feinen Röhre von ge-
 ringer und genau bekannter Neigung. Diese wird
 dadurch hervorgerufen und gemessen, dass auf einer
 der beiden horizontalen Leitern L_1 und L_2 , deren
 Ränder um eine bekannte Strecke unterschied-
 lich sind, ein Gewicht D von gemessener Größe
 aufgelegt wird. Den Vordruck der Lupe in
 Längsrichtung lässt man (abgegeben von einer the-
 matischen Vorrichtung) direkt an der verstellbaren Feder
 P ab, welche so eingerichtet ist, dass, wenn die
 Spitze S des Druckrohrs kreisförmig fließt, so
 bewirkt, der als Feder funktionierende Feder f
 genau auf dem Nullpunkt steht. Bei gepumptem
 Wasser H_2 wird auf p ein Tropfen Wasser-
 lösung gebracht und durch Hineinblasen bei H_1
 die Lupe vorwärts. Nun fließt man den Wasser
 H_1 und öffnet H_2 . Abwärts steigt das Wasser
 in R an und bleibt auf einem Spielrohr
 Δ_2 stehen. Dann stellt man die Spitze S auf
 der Lupe auf und lässt an der Feder P
 der Lupe und Vordruck ab und bläst endlich
 die Lupe weg, wobei das Wasser in R auf
 einem tieferen Spielrohr Δ_1 zurücksteht.
 Der Druck in der Lupe beträgt also, wenn
 σ das spezifische Gewicht des Wassers bedeutet:

$$P = (\Delta_2 - \Delta_1) \sigma \sin \alpha$$

Der spezifische Wert der Neigung der Lupe ist
 berechnete Druck

$$P' = \frac{4 \Sigma}{D}$$

Nun nur:

$$\sigma = 0.728$$

$$\Sigma = 0.0545 \text{ Gramm pro cm}$$

$$\sin \alpha = 0.0570$$

Die Genauigkeit fordert zwei Korrekturen:
 die eine betrifft das Sinken des Langens in
 F_2 beim Aufsteigen in R , die andere den
 maffen Vorkorrekturen D_{corr} der Lufte, welcher
 von dem abgelesen sein mäßig abnimmt,
 weil die Luft die Ebene des Plättchens nicht
 tangiert sondern in einem Winkel steht.

Die für die Korrekturen nötigen Daten
 waren (nämlich Q_1 den Radius der Röhre R , Q_2
 den Radius des Flüssigkeits F_2 und Q_3 den Ra-
 dius des Plättchens p bedeutet)

$$Q_1 = 0.0727 \text{ cm}$$

$$Q_2 = 0.920 \text{ cm}$$

$$Q_3 = 0.4 \text{ cm}$$

Nach diesen Daten nur der beobachtete Druck in
 der Luft

$$\bar{P} = 0.0461 (\Delta_2 - \Delta_1)$$

und der aus der Größenspannung berechnete

$$P' = 0.218 \frac{1}{D_{corr}}$$

In der folgenden Tabelle ist nun ein Teil
 der Messungen zusammengestellt, die ich mit
 der oben beschriebenen Vorrichtung vornahm.

Δ_2	Δ_1	$\Delta_2 - \Delta_1$	D_{corr}	\bar{P} (beobachteter Druck)	P' (berechneter Druck)
9.36	4.00	5.36	0.89	0.247	0.245
8.35	4.15	4.20	1.15	0.190	0.190
8.10	4.54	3.56	1.33	0.165	0.164
7.65	4.55	3.10	1.56	0.143	0.140
7.40	4.55	2.85	1.70	0.132	0.128
7.25	4.60	2.65	1.84	0.122	0.119
7.15	4.75	2.40	2.01	0.111	0.108
7.04	4.66	2.38	2.08	0.110	0.105
7.70	5.63	2.07	2.27	0.096	0.096

Δ_2	Δ_1	$\Delta_2 - \Delta_1$	T_{corr}	P (der beobachtete Druck)	P' (der berechnete Druck)
6.10	4.15	1.95	2.47	0.090	0.088
5.65	3.85	1.80	2.61	0.083	0.083
7.34	5.60	1.74	2.71	0.081	0.080
5.80	4.55	1.25	3.84	0.058	0.057
5.50	4.48	1.02	4.68	0.047	0.046
5.25	4.33	0.92	5.13	0.0425	0.042
5.75	4.80	0.95	5.08	0.044	0.043

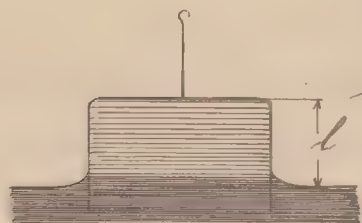
der Vakuumstimmung, welche bei den für an-
gefügten und zuweisenden anderen Messungen
zwischen dem beobachteten Druck P und dem
mit der Zellenstimmung berechneten P' auf ung.
unserlog zeigte, spricht mir ein fürsichander
Satz dafür zu sein, daß die Luft in der Lufte
einzig und allein durch den Einfluß der gespannten
Zelle zusammengedrückt wird.

Es muß bei diesen Versuchen
stets länger verweilt werden, weil sie mit den
Lagillarrospinnungen innig zusammenhängen,
indem der Druck in der Lufte durch dieselbe
Kraft hervorgerufen wird, die auf das An-
steigen der Flüssigkeit in Lagillarrospinnen
beruht. Wenn die Spannung S des Flüssig-
keitshäutchens hat ihren Grund in der Spannung
 S der beiden freien Flüssigkeitsoberflächen, welche
das Häutchen begrenzen.

Es müßte auf keinen anderen grobsten
Grund für die Spannung der flüssigen Mem-
bran angegeben werden. Wohl am meisten liegt
der Gedanke, dieselbe rühre nur von einer ge-
wissen elastischen Flüssigkeit, welche den flüssigen
Körper ansetzt und gegen eine Deformation

rangiert. Diese Fortleitung ist aber nicht gleich-
förmig, denn einseitig unmittelbar auf die
bezugnehmen Flüssigkeiten; bei denen keine
Zur von Flüssigkeit auf beobachtet wird,
ungewöhnlich ganz beträchtliche Spannungen in
ihren Hülften, andererseits kann von elastici-
tätswirkungen unmöglich dort die Rede sein,
wo die Kraft von der Deformation unab-
hängig ist. Wenn der Zug, welcher auf die

Fig 17.



Gabel auf überträgt und den
Ausfluss der Magma bewirkt, ist,
wie bereits erwähnt, unabhängig
von der Länge l , zu welcher das
Hülften gedehnt wird, und, so-
bald die Magma im Gleichgewicht ist, kann man das
Gefäß langsam senken und heben, also das Hülften
senken und anheben, ohne dass der Zug
an der Gabel auf ändert. - Wenn man eine gro-
ße Oefenblase aufbläst und die Luftspannung
misst, so kann diese Oefnung des Gefäßes H , (Fig 16)
einen Teil der Luft ausströmen lassen, so-
müsst mit Abnahme des Luftdruckes die
Luftspannung genau nach Messung der Formel
 $P = \frac{2\sigma}{R}$, während der die Hülftenspannung, wenn
sie wirklich eine Folge von Flüssigkeit oder elastici-
tät wäre, beim Zusammenpressen der
Blase abnehmen, die beobachtete Luftspannung
also von der Formel immer mehr abweichen
würde.

Noch weniger haltbar wäre es, den Zug
an der Gabel der schwebenden Mischung der
in den Hülften angeordneten Messerspitzen

zugriffen. Es bleibt die einzige Annahme übrig, dass die Spannung des Häutchens sich zusammensetze aus den Spannungen der beiden Seitenflächen desselben, deren Nothwendigkeit bereits oben scharf dargestellt wurde. Die Spannung Σ des Häutchens gibt uns also die doppelte Oberflächenspannung Γ , und mit Hilfe dieser kann man für die vorfindenden Flüssigkeiten Γ bestimmen.

$$\Gamma = \frac{1}{2} \Sigma \dots \dots (4)$$

Nun geht es auf die eigentlichen Capillarspannungen über.

Ist die Flüssigkeitsoberfläche eben, so hat ihre Spannung mit der übrigen Flüssigkeit selbstverwandtschaft gar keinen Einfluss, so, wie eine gerade gespannte Sehne normal zu jeder Richtung keinen Druck ausübt. Ist aber die Oberfläche gekrümmt,

Fig 18.



so muss sie, wie leicht einzusehen, gegen das Innere des Rohres einen Druck üben; dessen Größe leicht in ähnlicher Weise berechnet werden kann, wie die Luftspannung in der Kugel. Nehmen wir zunächst an, die Oberfläche sei auf einem Kreiszylinder gekrümmt; der Radius ist R , die Länge der entsprechenden = 1. Wird nun der Radius des Zylinders um dR kleiner, so ändert sich seine Mantelfläche um $2\pi dR$, sein Volumen um $2\pi R dR$. Wenn nun der Druck im Innern des Zylinders den Zusammenstößungen der gespannten Mantelfläche-Gleichgewicht halten soll, so muss

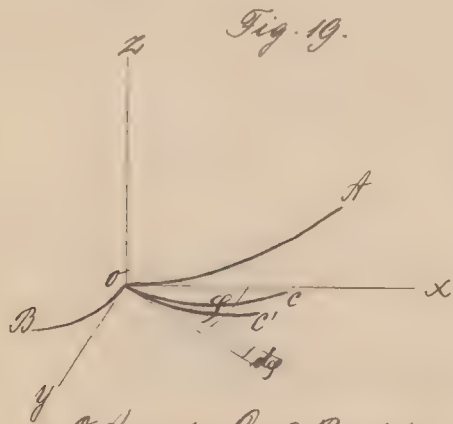
$$2\pi R dR \cdot P = 2\pi dR \Gamma$$

$$P = \frac{\Gamma}{R} \dots \dots (5)$$

In ganz ähnlicher Weise findet man den Druck in einem gespannten Kugeloberfläche:

$$P = \frac{2\sigma}{R} \dots\dots\dots 6)$$

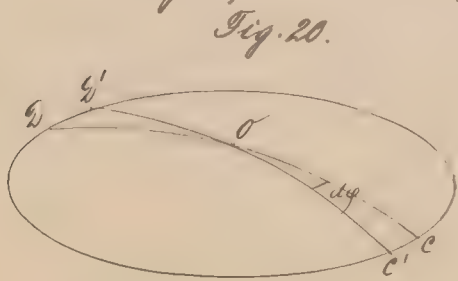
fullig läßt sich auf die Druck berechnen, die eine Oberfläche von beliebiger Krümmung in jedem Punkte auf die Flüssigkeit ausübt.



Wir nehmen ein Koordinatensystem so an, daß die xy -Ebene im Ursprunge O die Fläche tangiert und die beiden and. von Koordinatenachsen die selben in den Hauptkrümmungen OA und OB schneiden. Der Hauptkrümmungsradius OA hat die Krümmungsradius R_1 , OB den Radius R_2 . Der Radius R nimmt unter dem Winkel φ zwischen Schnitt CC' läßt sich der allgemeinen Flüssigkeitsdruck gemäß nach der Formel berechnen:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi$$

Durch unendlich viele radiäre Schnitte zerfällt die Fläche um den Punkt O in unendlich viele convergirende Kreise CC' etc. deren Krümmung von Schnitt zu Schnitt variiert, aber innerhalb eines Kreises als constant angenommen werden kann. So haben wir es nimmer mit lauter Kugelflächen zu thun. Der Druck, welchen ein



Flüssigkeit Kugelgewinck $CC'ED'$, dessen Scheitelwinkel $d\varphi$ ist, vermöge seiner Spannung gegen den Kugelmittel. gleich übt, ist nur der $\frac{2}{3} d\varphi$ Theil des Drucks einer vollen Kugel. fläche von demselben Radius und derselben Span.

nüny ulfo

$$dP = \frac{dq}{\pi} \cdot \frac{2J}{R}$$

oder nach Einsetzung des Wertes von $\frac{1}{R}$:

$$dP = \frac{2J}{\pi R_1} \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{2J}{\pi R_2} \sin^2 \varphi d\varphi$$

der Druck der jungen flüße im Punkte O:

$$P = \frac{2J}{\pi R_1} \int \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{2J}{\pi R_2} \int \sin^2 \varphi d\varphi$$

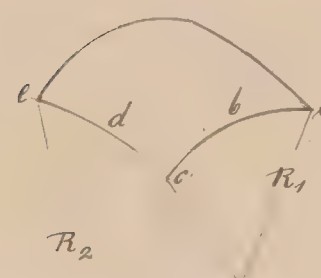
Nach Vorführung der Integration:

$$P = J \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \dots \dots \dots 7.)$$

Dieser, wenn nicht anders steht
ist ein anderer Satz nämlich der folgende.

Fig. 21.

Es soll ac ein aus der flüße ge-
richteter schnitt sein, dessen
richtung parallel zu
den flüßschnitten sind.



Möge cde gerade und fröhliche
eines zylinders, dessen lichte
 abc ist, so würde der zylinder aus dieser
einen drehung auf einen brück
über $= \frac{J}{R_1}$; möge nun cde gekrümmt,
 abc gerade, so würde der zylinder aus
einer drehung einen brück
 $= \frac{J}{R_2}$ über. Da nun die flüße auf beiden
richtungen gleichzeitig gekrümmt ist, so addieren
sich die beiden drehungen und der gesamt-
druck ist:

$$P = J \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

folgt nun die allgemeine flüssigkeit,
daß die drehung der beiden flüßrichtungen
gleich ist der drehung der drehungen zweier
beliebiger auf einander senkrechten schnitte;

nur brauchen also die Seiten des Raftbuchs
nicht zu den Hingehaltenen parallel ange-
bracht und gelangen immer zu demselben
Resultate:

Damit sind die Mittel gegeben, die Gestalt
der freien Oberfläche in jedem besonderen
Falle zu berücksichtigen; wenn man nämlich be-
achtet, daß, falls Glasgerüst vorhanden ist, der
Brück der zusammengehörigen Oberfläche $S(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ in
jedem Punkte dem sphärischen Brücke gleich
sein muß. Dabei haben wir es bei concaven
Oberflächen mit einem positiven Brücke,
bei convexen mit einem negativen Brücke
der gegebenen Messung zu thun. Man sieht
aus den Glasgerüsten 5) und 6), warum
in Linsenröhren nicht zwischen zwei parallelen
Platten die Einstellung dem Vorfaktor des Krü-
mmung (resp. dem Abstande der beiden Platten)
umgekehrt proportional ist, warum ferner die
Einstellung zwischen den Platten nur sehr groß
ist, als in einem runden Linsenröhren, dessen
Vorfaktor gleich ist dem Abstande der beiden
Platten.

Dabei ist die gespannte Oberfläche mit ihren
Rändern an der Wand des festen Körpers befestigt und
zwar längs jener Linie, welche die Grenze der Netzung
bildet. Wenn man in einem Rofa die
Flüssigkeit anfügt und dann wieder frischen
läßt, so versteht, was aus Laplace bemerkt,
im Falle einer vollständigen Adhäsion die Wand
des Rofa mit einer gleichmäßigen dünnen
Flüssigkeitsschicht überzogen; diese geht an ihrem

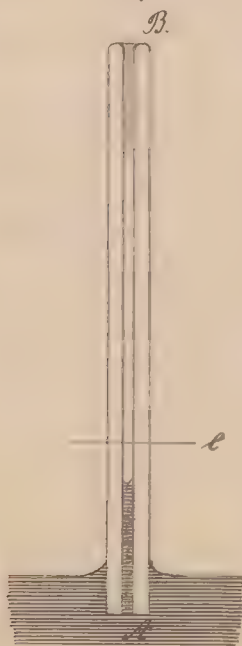
unters Ende statig in die Flüssigkeitsober-

Fig. 22.



fließt über, so daß man in m und n die Manöflüße tangirt. Die nutzende Flüssigkeitsspitze beialt auf einer Seite eine freie Oberflähe dar, welche nach dem Vorversuchsten eine Spannung Spro^{cm} auszuwickeln muß. Diese Spannung fällt gleichsam die Ränder m n des geschnittenen Füllungs m n o, dessen Drückung in jedem Punkte der äußeren der Mischung dar geschnittenen Flüssigkeitsspitze aus Gleichgewicht fällt. Dann wird die nutzende Flüssigkeitsspitze in ihren Endabständen p q direct durch die Anziehung der Theilchen des festen Körpers auf die Flüssigkeitstheilchen festgehalten. Daß die Massenwirkung größerer Flüssigkeit und Rohr. und ihrer Sitz wirklich erst bei p q ist, kann man sich durch ein Experiment überzeugen. Man befestigt ein reines Glasröhrchen AB mit oben abgerundeten Enden so, daß es unten in Wasser taucht, taucht jedoch so, daß das Wasser maßmäßig bis B an, damit das Röhrchen bis zum oberen Ende gehörig benutzt sei, und bezieht den Rand des Muffens e. Hiermit bringt man einen kleinen Tropfen von gefärbter Flüssigkeit mit geringer spezifischer Oberflächenspannung, einen gefärbten Alkohol, auf das obere Ende B, jedoch mit Vorsicht, damit die Öffnung oben nicht überdeckt.

Fig. 23.

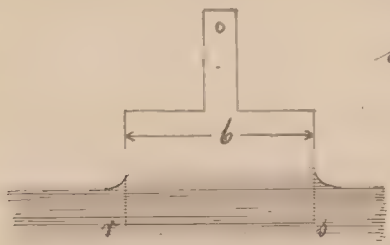


in Wasser taucht, taucht jedoch so, daß das Wasser maßmäßig bis B an, damit das Röhrchen bis zum oberen Ende gehörig benutzt sei, und bezieht den Rand des Muffens e. Hiermit bringt man einen kleinen Tropfen von gefärbter Flüssigkeit mit geringer spezifischer Oberflächenspannung, einen gefärbten Alkohol, auf das obere Ende B, jedoch mit Vorsicht, damit die Öffnung oben nicht überdeckt.

werden. Sofort wird die schon gespannte Al-
 koholpflanze von der stärker gespannten Mus-
 schelpflanze fanningazogen und steigt immer tiefer
 hinunter. Gleichzeitig hebt sich die Mus-
 schelpflanze von oben auf und die im
 Röhrchen angehobene Wassersäule sinkt. Bei mini-
 maler Verschiebung der Röhre im Wasser ab-
 sen, obwohl, wie ich bei der Verschiebung erkannte,
 die Alkoholpflanze noch um 5-6 cm von der Ober-
 fläche des Wassers im Längsrohr aus-
 steht. Somit wirkt die Vermittlung
 der gespannten flüssigen Mandibularzunge
 auf auszusinken.

Die für ungenutzte Aufschwümmung
 nicht, obwohl unmittelbar zum Aufschwümmen
 der Röhre beifallt. Daraus, daß eine gewisse
 Röhre in einer aufsteigenden flüssigen Sub-
 stanz eingetaucht, von derselben fanningazogen
 wird mit einer Druck = U , wobei U die
 Umpfung des Röhrens bedeutet. Diese Druck, die,
 wie bereits bemerkt, an der Trennungslinie
 der benutzten und benutzten Mandibularzunge angreift,
 wirkt dem Aufsteigen entgegen und ist bei

Fig. 24.

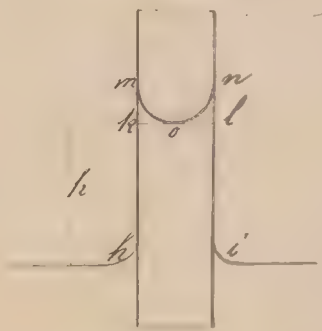


verwendeten Messungen noch zu
 berücksichtigen. Es folgt, daß die
 dünnen röhrenförmigen Glüh-
 röhren gewaschen, deren Länge 6 cm
 wie bekannt war. Das Plättchen
 wurde auf den Gabel unter der Mandibular-
 zunge eingefügt und eingeklebt. Sobald nun die
 untere Röhre mit der flüssigen Oberfläche

in Lösung kam, würde das Plättchen ein-
gezogen und es fand durch unermüdete
Ausgleichung jedesmal $Q = 6\Sigma = 26I$, was un-
geachtet der außerordentlich geringen Werte mit
II identisch ist. Solcher Plättchen kann man
sich also anstatt der Gabeln bedienen, um
die spezifische Oberflächenspannung verschiedener
Flüssigkeiten zu bestimmen.

Das zweite Experiment bezieht sich auf das An-
heben der Flüssigkeit in prismatischen Röhr-
chen von beliebigem Querschnitt und wird
von Laplace in die Worte gefaßt: Le volume de
fluide, élevé au dessus du niveau par l'action
capillaire, est proportionnel au contour de la section
de la surface intérieure du tube. Dieser Satz
bedarf nur eines kleinen Lemmas und kann nun
noch leichter principirt werden: Das Gewicht der
angehobenen Flüssigkeit ist gleich dem inneren
Umfange der Röhre multiplicirt mit der spe-
cifischen Oberflächenspannung.

Wir wenden diesen Satz auf konigeylin-
drische Röhren an. Der innere Umfang des
Röhrens ist $2R\pi$, folglich das Gewicht der angehobenen
Flüssigkeit $G = 2R\pi \cdot I$. Dieser Satz läßt sich zusammen-
fassen in dem Gewicht der Röhre $h \cdot 2R\pi =$
 $= R^2\pi h s$ (s bedeutet das spezifische Gewicht),
und dem Gewicht des Meniscus $kolmn$,
welches mit Rücksicht auf die nufzu-
fallende kugelförmige Gestalt der flüssigen
gleich ist: $\frac{1}{3} R^2\pi s$.



Es ist also

$$2R\pi I = R^2\pi s \left(h + \frac{R}{3} \right)$$

und daraus

$$h = \frac{2J}{R\delta} - \frac{R}{3} \dots\dots\dots 8.)$$

Leichte Prüfung der Zusammensetzung der
Oberflächenspannung mit den Capillarrohrchen.
Man füllt sie mit einer flüssigen Substanz.
Verschiedene Messungen angestellt und füllt sie in
einer Substanz zusammen.

Flüssigkeit	δ	$J = \frac{\Sigma}{2}$	R	$h(\text{beobachtet})$	$h(\text{berechnet})$
Abs. Alkohol	0.800	0.024	0.0386	1.51	1.54
			0.0440	1.31	1.34
			0.0648	0.89	0.91
Aceton	0.815	0.0255	0.0386	1.59	1.61
			0.0440	1.40	1.40
			0.0648	0.95	0.95
Conc. Schwefelsäure	1.84	0.056	0.0386	1.65	1.56
			0.0440	1.32	1.36
			0.0648	0.92	0.92
Schwefeläther	0.725	0.019	0.0386	1.32	1.35
			0.0440	1.15	1.18
			0.0648	0.78	0.79
Schwefelkohlenstoff	1.269	0.034	0.0386	1.37	1.34
			0.0440	1.21	1.19
			0.0648	0.82	0.82
Wasser	1.00	0.074	0.0386	3.87	3.82
			0.0440	3.36	3.34
			0.0648	2.27	2.27
Benzin	0.727	0.023	0.0388	1.56	1.61
			0.0447	1.40	1.41
			0.0547	1.14	1.14

Flüssigkeit	δ	$\delta = \frac{\Sigma}{\Sigma}$	R	$R(\text{beobachtet})$	$R(\text{berechnet})$
Petroleum	0.801	0.0272	0.0388	1.71	1.73
			0.0447	1.46	1.49
			0.0547	1.22	1.22
Terpentin- öl.	0.866	0.0295	0.0388	1.71	1.74
			0.0447	1.46	1.50
			0.0547	1.20	1.23

Die quantitative Abweichungswärme gemessen. Der beobachteten und der berechneten Höhe ist so auffallend und fast so congruent, wie bei den vorfindenwertigsten Flüssigkeiten, daß sie schwerlich als zufällig bezeichnet werden darf; vielmehr bildet sie einen wichtigen Beitrag zur Abhängigkeit der Zugilluv. vorfindungen von der Oberflächenspannung der Flüssigkeiten. Die Abweichungen, die hier auftreten, sind unbedeutend genug, um durch die oberflächenspannungseffekte erklärt zu werden. Diese können sich leicht einpflanzen bei der Messung der Höhe. Die Messungen wegen mangelhafter Nutzung der inneren Porosität, zunächst aber bei der Messung der Grundflächenspannung Σ . Hier muß der Austritt der Flüssigkeit verhindert werden; man muß sich hüten, durch ein allzu rasches Ziehen des Gefäßes einen Riß auf die Messung zu üben, wodurch die Messung ungenau wird; man darf - besonders bei Wasser und wässrigen Lösungen - die Flüssigkeit im Gefäß nicht zu lange stehen lassen, da sie sonst (wie ich glaube durch Absorption von Gasen) ihre Dampfschicht an der Oberfläche ein wenig ändert. Diese Faktoren lassen sich durch Übung zum

großen Hufe befehtigen, daß man von Zeit zu Zeit die Flüssigkeit prüft, ob sie stark gerührt.

Die Lösungen und Mischungen sind von Anfang an ihrer Oberfläche durch Verdampfen aus Lösungs- oder Mischungsverhältniß; dies ist auf für den Grund, warum die Abmischungen bei diesen Flüssigkeiten etwas größer sind, als bei den reinen und einfachen.

Flüssigkeit	S	$\gamma = \frac{\Sigma}{2}$	R	R (berechnet)	R (beobachtet)
Mischung von Alkohol und Wasser (40%)	0.937	0.032	0.0386	1.75	1.76
			0.0440	1.49	1.54
			0.0648	1.00	1.04
Aetzkalilösung.	1.013	0.069	0.0386	3.05	3.51
			0.0440	3.26	3.09
			0.0648	2.15	2.09
Conc. Kupfervitriol. Lösung	1.162	0.070	0.0386	3.21	3.09
			0.0440	2.90	2.70
			0.0648	1.95	1.82
Verd. Schwefelsäure (40%)	1.296	0.0535	0.0386	2.20	2.14
			0.0440	1.79	1.86
			0.0648	1.21	1.26
Zuckerlösung (15%)	1.037	0.069	0.0386	3.45	3.44
			0.0440	3.06	3.02
			0.0648	2.05	2.04

Um durch Bestimmung der Gestalt der Oberflüche in jedem einzelnen Falle zu bestimmen, muß man von der Gleichung 7.) ausgehen und beachten, daß für den Fall des Gleichgewichts die Hubkraft P der gekrümmten Oberflüche in jedem Punkte dem hydrostatischen Drucke gleich sein muß. Lagert man z die Höhe eines Oberflüches zu einem über dem horizontalen Niveau und s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so gilt die Gleichung:

$$I\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = z \cdot s$$

Wählt man nun die zwei Krümmungsradien R_1 und R_2 auf den Gesetzen der allg. gemainen Flächenformel durch partielle Differentialquotienten aus, so erfüllt man eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integration über die Gestalt der flüchen in einzelnen Fällen Aufschluß gibt.

Ist mit uns darauf beschränkt, einen leicht integrierbaren Fall unser zu betrachten. Man nehme eine ebene Platte in einer gut auflösenden Flüssigkeit unter beliebigem Winkel eintaucht, so zieht sich diese an der Wandfläche in form eines Zylinders heraus, dessen Längsgerade zur Platte senkrecht ist, dessen Leitlinie die Wandfläche tangiert. Um die form der Leitlinie zu bestimmen, nehmen wir die

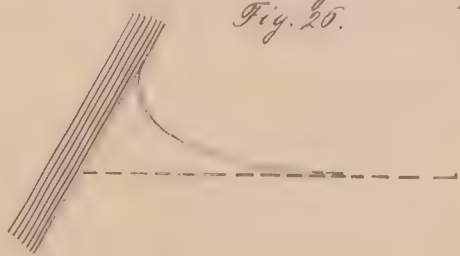


Fig. 26.

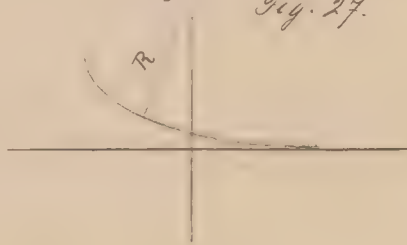


Fig. 27.

Richtung der horizontalen Richtung zur X-Achse um

Die $Y = 0$ der Kurve punktiert, jedoch vollständig
der Lage nach unbestimmt. Da $\frac{1}{R_2} = 0$ ist,
so haben wir die Gleichung: $\frac{1}{R_1} = y \cdot s$, oder

$$\frac{1}{R_1} = y \cdot k,$$

wobei der Quotient $\frac{1}{R} = k(\alpha)$ gesetzt werden:

$$\frac{y'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = y k$$

Nun ist $y' = \frac{dy}{dx}$, folglich

$$\frac{y' dy'}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = k y dy$$

und durch Integration:

$$\frac{2}{\sqrt{1+y'^2}} + k y^2 = C_1$$

Wir bestimmen aus dieser Gleichung y' in
expliziter Form:

$$y' = \frac{\sqrt{4 - (C_1 - k y^2)^2}}{C_1 - k y^2} \quad \dots \dots \dots (b.)$$

Um C_1 zu bestimmen, brauchen wir, daß
für $y=0$ auch $y'=0$ sein muß; wir finden
 $C_1 = 2$

und die Gleichung b.) lautet nunmehr:

$$\frac{dy}{dx} = y \sqrt{k} \frac{\sqrt{4 - k y^2}}{2 - k y^2}$$

$$\dots \dots dx = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2 - k y^2}{y \sqrt{4 - k y^2}} dy \quad \text{und}$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{k}} \int \frac{dy}{y \sqrt{4 - k y^2}} - \sqrt{k} \int \frac{y dy}{\sqrt{4 - k y^2}} + C_2 \dots \dots (c.)$$

Um das erste Integral zu finden setzen wir

$$\sqrt{4 - k y^2} = z \quad \text{und erhalten}$$

$$\int \frac{dy}{y \sqrt{4 - k y^2}} = - \int \frac{dz}{4 - z^2} = \frac{1}{4} \log \text{nat} \frac{2-z}{2+z} = \frac{1}{4} \log \text{nat} \frac{2 - \sqrt{4 - k y^2}}{2 + \sqrt{4 - k y^2}}$$

das zweite Integral:

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{4 - k y^2}} = - \frac{1}{k} \sqrt{4 - k y^2}$$

Soll kann man uns leicht das Volumen V der über das Niveau gegebenen Flüssigkeit berechnen. Nennen wir die Länge der Fingerringen $= l$ und, so ist $V = F = \int_0^l (x - x_n) dy = \int_0^l x dy - x_n y_n$

$$\int x dy = \frac{1}{2\sqrt{k}} \int \log(2 - \sqrt{4 - ky^2}) dy - \frac{1}{2\sqrt{k}} \int \log(2 + \sqrt{4 - ky^2}) dy - \frac{1}{\sqrt{k}} \int \sqrt{4 - ky^2} dy + C$$

Alle drei für vor kommenden Integrationen lassen sich auflösen (die beiden ersten durch Formulation: $\sqrt{4 - ky^2} = z$) und man erhält durch Einsetzen, Zusammenzählen und Vereinigen aller constanten Größen:

$$\int x dy = \frac{1}{2\sqrt{k}} y \log \text{nat} \frac{2 - \sqrt{4 - ky^2}}{2 + \sqrt{4 - ky^2}} - \frac{1}{2\sqrt{k}} y \sqrt{4 - ky^2} + C$$

Endlich setzt man die Grenzen ein, subtrahiert $x_n y_n$ und erhält:

$$F = V = \frac{1}{k} = (\text{maß a.}) \frac{1}{5}$$

Das Gewicht der gegebenen Flüssigkeit:

$$G = F \dots \dots 10.)$$

Dieses Resultat steht mit dem Vorhergehenden im besten Einklange. Da wir der benutzten Mund für feinschmeckende Flüssigkeiten pflegen kann, wenn Glasgeräthe zerbrechen soll, nicht mehr und nicht weniger Flüssigkeit über das Niveau geben, als ihre spezifische Dichtigkeit gestattet. An ihrem oberen Ende ist die gesamte Röhre längs der Länge der Röhre um der Mund der Platte befestigt und zieht sich Leutlicher ihrer Seite mit einem Druck $\frac{1}{5}$ einwärts. So überträgt sich durch Vermittlung der netzenden Schichte die Luft der gegebenen Flüssigkeit auf den eingetauchten Körper -

n

dy =

ky dy +
+ C

n

.

C

L

.

an

td.

ll.

iff.

gung

nff

ung

an

